VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA PODNIKATELSKÁ
ÚSTAV INFORMATIKY

FACULTY OF BUSINESS AND MANAGEMENT
INSTITUTE OF INFORMATICS

MATEMATICKÉ METODY V EKONOMII

MATHEMATICAL METHODS IN ECONOMICS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR THESIS

AUTOR PRÁCE — JÁN MAREČEK

AUTHOR

VEDÚCI PRÁCE — Mgr. MARTINA BOBALOVÁ, Ph.D.

SUPERVISOR

Brno 2015

Zadanie

Abstrakt

Bakalárska práca sa zameriava na analýzu matematický procesov a metód v ekonómii. Cieľom tejto práce je popísať teoreticky a prakticky vybrané metódy, ktoré sa bežne v ekonómií používajú.

Abstract

Main focus of this thesis is to analyze mathematical methods in the field of economics and to describe both teoretically and practically some of the mathematical methods comonly used in economics.

Kľúčové slová

Matematika, metódy, ekonómia, matematicko-ekonomické metódy, operačná analýza.

Key words

Mathematics, methods, economics.

Bibliografická citácia

Mareček, J. 2014. Matematické metódy v ekonómii. Brno Bakalárska práca. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta podnikatelská. Vedúci práce Mgr. Martina Bobalová, Ph.D.

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že predložená bakalárska práca je pôvodná a spracoval som ju samostatne.

Prehlasujem, že citácie použitých prameňov sú úplné a že som v svojej práci neporušil autorské práva (Zákon č. 121/2000 Zb., o autorskom práve a o právach súvisiacich s autorským právom).

V Brne dňa 3. júna 2015

....

Ján Mareček

Poďakovanie

Rád by som poďakoval všetkým, ktorí mi poskytli nezištnú pomoc pri písaní tejto bakalárskej práce. V prvom rade by som poďakoval mojej vedúcej Mgr. Martine Bobalové za ochotu a rady pri písaní práce, ale aj zamestnancom firiem, ktorí mi umožnili aplikovať matematické teórie na reálnych príkladoch.

Obsah

1. Úvod

Matematika v ekonómii sa začala rozvíjať v 19. storočí. V tej dobe prevažná časť ekonomickej analýzy zodpovedala tomu, čo dnes nazývame klasická ekonómia. Ekonómovia dovtedy nevyvíjali explicitné a abstraktné modely správania s cieľom použiť nástroje matematiky. Prelomovým bol až rok 1826, v ktorom Johann Heinrich von Thünen skonštruoval model využívania poľnohospodárskej pôdy, ktorý predstavoval prvý príklad marginálnej (hraničnej) analýzy. V porovnaní s jeho súčasníkmi, Thünen radšej postavil nové ekonomické modely a nástroje než by použil tie už existujúce. Rad nových matematických nástrojov ako je diferenciálny počet, lineárne programovanie, konvexné množiny a teória grafov sa od roku 1930 začal používať v ekonomickej teórii v podobe nových matematických metód, ktoré boli predtým uplatňované najmä vo fyzike.

V súčasnosti je matematika neoddeliteľnou súčasťou ekonómie. Je to nesmierne silný nástroj, ktorý však treba používať s rozumom. Ekonómia je spoločenská veda, a preto využívanie matematiky ako exaktnej vedy v nej nesie so sebou veľa problémov. Už len najzákladnejší predpoklad racionality správania ľudí je v skutočnosti nereálny. Ľudia totiž nikdy nehľadia iba na svoj vlastný úžitok. Práca odpovedá na otázku, ako dobre a za akých predpokladov dokáže matematika resp. rôzne matematické metódy popísať vybrané ekonomické problémy (ĎUĎÁK, 2010).

2. Ciele práce, metódy a postupy spracovania

Cieľom tejto bakalárskej práce je popísanie vybraných matematický metód a ich použitie v ekonómii na riešenie reálnych problémov. Z veľkého množstva matematickým metód v ekonómií boli vybrané tie, s ktorými sa najčastejšie stretávame v praktickom živote. Tieto metódy sú popísané v nasledujúcich kapitolách.

Teoretická časť je venovaná popisu matematických metód. Matematické metódy sú popísané ako celok a následne je uvedený stručnejší popis tých metód, ktoré boli vybraté pre použitie v praktickej časti práce. Dôraz je kladený na slovný popis metódy a teda postup riešenia. Rovnako sú v tejto časti uvedené aj príklady na dané metódy spolu s postupom riešenia.

Praktická časť je zameraná na využitie metód v praxi na konkrétnych príkladoch s interpretáciou výsledkov.

Poslednou časťou je zhrnutie celej práce spolu s interpretovaním výsledkov.

3. Teoretické východiská

Táto kapitola obsahuje matematicko-ekonomické metódy bežne použité v praxi pri riešení problémov z oblasti plánovania, optimalizácie stratégií a pod. Každá metóda je teoreticky popísaná a vybrané metódy budú neskôr použité v praktickej časti

3.1. Lineárne programovanie

Do lineárneho programovania zahŕňame metódy, ktoré používame pri riešení problému najlepšieho využívania obmedzených zdrojov. Z celého radu možných riešení sa hľadá také, pri ktorom hodnota optimalizačného kritéria nadobúda extrémne (maximálne alebo minimálne) hodnoty. Takéto riešenie je optimálne. Do matematického programovania patrí dnes už celý rad relatívne samostatných disciplín, ako lineárne programovanie, nelineárne programovanie, stochastické programovanie, dynamické programovanie, parametrické programovanie, atď. Matematickým programovaním možno riešiť okrem iného napr. (ĎUĎÁK, 2010):

- Stanovenie optimálneho výrobného programu (optimalizačným kritériom môže byť hodnota výroby, zisk, produktivita práce, využitie kapacity, atď.).
- Optimálne pridelenie zakázok na jednotlivé pracoviská alebo výrobné zariadenia.
- Optimalizáciu prepravných (dopravných) plánov, pri ktorých sa minimalizujú dopravné náklady alebo celkovo prejdené vzdialenosti.
- Optimalizáciu rozmiestnenia servisných staníc.
- Viacetapové optimálne rozhodovanie.

Lineárne programovanie vzniklo ako vedná disciplína približne pred 70 rokmi a jeho rozmach sa spája so zavádzaním počítačovej techniky, ktorá uľahčila výpočetné postupy (JANÁČEK, 1999).

Matematické programovanie umožňuje transformovať reálne procesy do matematických modelov a tie následne riešiť pomocou matematického aparátu.

O každom rozhodovacom procese alebo probléme môžeme uvažovať ako o spojení rady predpokladov, ktoré vymedzujú vhodné riešenia. Pri riešení týchto problémov musia byť obmedzujúce podmienky plne rešpektované, pričom sa snažíme v rámci týchto podmienok nájsť najlepšie riešenie (podľa zadanej úlohy). Takto by sa dal zjednodušene popísať princíp optimalizačných modelov (ŠUBRT, 2011). O lineárnom modely hovoríme vtedy ak budú pre jeho matematickú formuláciu použité iba lineárne funkcie, lineárne rovnice a nerovnice. Lineárny optimalizačný model je najpoužívanejším typom optimalizačných úloh. (ŠUBRT, 2011).

Takýto matematický model, v našom prípade lineárny matematický model umožňuje zobraziť systém s určitou mierou nepresnosti, nakoľko treba vychádzať z predpokladu linearity zobrazovaných procesov a deterministického charakteru parametrov daného modelu.

Nakoľko je možné pomocou lineárneho programovania riešiť veľké množstvo úloh, je práve toto matematické programovanie jedným z najpoužívanejších metód, ktoré sa využívajú pri rozhodovaní (ŠUBRT, 2011).

Pretože sa pomocou rozhodovacieho procesu snažíme vybrať najlepšie riešenie problému, je nutné si stanoviť ciele, ktoré chceme dosiahnuť. V prípade matematického programovania ide o ciele, napr.:

- Maximalizácia zisku.
- Maximalizácia účinnosti zariadenia.
- Maximalizácia produktivity.
- Maximalizácia množstva prepravovaného materiálu.
- Minimalizácia výrobných nákladov.
- Minimalizácia odpadu a iné.

Keďže v reálnom svete sú hore uvedené ciele spojené s istými podmienkami, ako je uvedené na začiatku kapitoly aj matematický model musí obsahovať tieto podmienky. V našom prípade podmienky obmedzujúce, na ktorých má daný proces fungovať. Príklady takýchto podmienok sú:

- Zdroje materiálu
- Kapacita výrobného zariadenia
- Kapacita pracovnej sily
- Životnosť
- Financie

- Možnosti odbytu
- Kapacita dodávateľov
- Kapacita prepravy
- Kapacita skladu a iné

V nasledujúcich podkapitolách sú popisované konkrétne jednotlivé kroky k formulácii lineárneho modelu a aj bližšie uvedené typy úloh z lineárneho programovania.

3.1.1. Model lineárneho programovania

Podobne ako aj iné matematicko-ekonomické metódy ktoré sú popísané v ďalších kapitolách, aj lineárne programovanie používa na popis procesov matematický model. V tomto prípade ide o model lineárneho programovania, ktorý sa používa hlavne v rozhodovacích situáciách. Tento model slúži na popis systému z reálneho sveta. Ide predovšetkým o to aby bol model čo najpresnejší, je nutné si stanoviť jednotky a definovať premenné a funkčné vzťahy.

Pri realizácii modelu musíme brať dôraz na reálnu situáciu, ktorú chceme popísať matematickým modelom, nakoľko pri situáciách kde je nutné rozhodovanie musíme zohľadniť to, že daná situácia môže mať väčší počet činností (procesov) v rôznych kombináciách. Pretože ide o proces rozhodovania, je nutné stanoviť optimálnu kombináciu týchto procesov podľa určitých podmienok, pričom môžeme predpokladať, že tieto procesy sú obmedzené danými podmienkami.

Model lineárneho programovania sa skladá z týchto základných komponentov (ŠUBRT 2011).

- Premenné
- Obmedzujúce podmienky
- Kriteriálna funkcia
- Podmienky nezápornosti premenných

Premenné

Pri zostavovaní lineárneho modelu musíme vždy brať ohľad na premenné, ktoré slúžia na rozhodovanie. Tieto premenné sú procesy, ktoré nás budú zaujímať z hľadiska rozhodnutia, ktoré chceme vykonať na základe daného problému. Pri riešení problému teda musí byť jasné, ako premenné formulovať. Akonáhle je premenná identifikovaná, je nutné jej určiť jednotku, ktorá vyplýva zo zadania danej úlohy alebo problému.

Obmedzujúce podmienky

Obmedzujúce podmienky vymedzujú kombinácie procesov, ktoré sú prípustné pri riešení problému. Tieto podmienky sú rozdelené na dve strany a to:

- Ľavá strana: je tvorená skalárnym súčinom hodnôt premenných a technicko-ekonomických koeficientov, ktoré určujú množstvo vyčerpaného zdroja jednou jednotkou každého procesu (ŠUBRT 2011).
- Pravá strana: je tvorená konštantou veľkosti kapacity zdroja alebo určitého požiadavku. Ide o tzv. exogénne obmedzujúce podmienky ktoré nadobúdajú povahu (ŠUBRT 2011):
    - Kapacitnú – nemožnosť vyčerpania väčšieho zdroja než je k dispozícii

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$$

    - Požiadavková – potreba zaistiť minimálne dané množstvo produkcie

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$$

    - Určenia – nutnosť dosiahnuť stanovené výstupy

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

Pri niektorých situáciách je nutné použiť endogénne podmienky, ktoré sa vyznačujú tým, že ľavá aj pravá strana obsahuje iba premenné výrazy.

Kriteriálna funkcia

Kriteriálna funkcia reprezentuje cieľ riešenia problému, pretože oceňuje kvalitu jednotlivých prístupných kombinácií procesu. Aj tú musíme vyjadriť vo vhodných jednotkách. Kvalita každého procesu je ohodnotená cenovým koeficientom c_j, ktorý vyjadruje príspevok jednej jednotky tohto procesu k celkovej hodnote sledovaného kritéria (ŠUBRT 2011). Vzorec pre kriteriálnu funkciu:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow MAX$$

Podmienky nezápornosti

Z praktického hľadiska podmienky nezápornosti zaisťujú „interpretovateľnosť" alebo realizovateľnosť nájdeného riešenia. Môže sa stať, že nám vyjde pri riešení úlohy hodnota premennej $x_1 = -5$, z matematického hľadiska je to v poriadku ak sme splnili obmedzujúce podmienky ale keby sme brali do úvahy napr. rozlohu pozemku, nemôžeme daný problém riešiť v praxi.

Druhý dôvod prečo stanoviť podmienky nezápornosti je výpočtový. Nakoľko je simplexový algoritmus univerzálna metóda pre výpočet úloh z lineárneho programovania, jeho jednotlivé kroky by sme nemohli dokázať bez týchto podmienok.

Simplexový algoritmus

Ide o všeobecný postup riešenia úloh matematického programovania, ktorý je založený na riešení lineárnych rovníc a nerovníc, ktoré odpovedajú stanoveným obmedzujúcim podmienkam tak, že účelová funkcia nadobúda minimálne alebo maximálne hodnoty. Pre účely riešenia simplexového algoritmu je nutné poznať jordanovu eliminačnú metódu, ktorá spočíva vo vytvorení ekvivalentnej sústavy[1] rovníc k pôvodnej sústave rovníc, pričom matica sústavy obsahuje jednotkovú maticu (ŠUBRT 2011).

3.2. Metódy sieťovej analýzy

Tieto metódy sa používajú k rozborom a plánovaniu priebežných dôb výrobkov a obecne akýchkoľvek zložitých činností (projektov), kde ide o zistenie a využitie časových rezerv v priebehu projektu z hľadiska času, využitia zdrojov a nákladov. Metódy sieťovej analýzy sa používajú napr. k plánovaniu rozsiahlych investičných akcií, vývojových a výskumných prác, k plánovaniu opráv a rekonštrukcií, rozsiahlych organizačných prác a činností súvisiacich so zavádzaním výroby nového výrobku. Metód sieťovej analýzy je viac, avšak najznámejšie a najrozšírenejšie sú: (ĎUĎÁK, 2010)

[1] Ekvivalentná sústava je vytvorená pomocou elementárnych operácií s rozšírenou maticou sústavy

• metóda CPM (Critical Path Method),

• metóda PERT (Program Evalution and Review Technigue).

Sieťová analýza je matematická metóda, ktorá sa používa v ekonómií predovšetkým na plánovanie a celkové zefektívnenie celého komplexu na seba nadväzujúcich činností pričom jej hlavným cieľom je znižovanie nákladov na ich realizáciu. (BREZINA, ČIČKOVÁ, GEŽÍK, 2012) Sieťová analýza sa používa na reprezentáciu činností a zložitých akcií, resp. projektov rôzne grafické zobrazenia. Pomocou týchto zobrazení je možné zobraziť realizované činnosti tak, ako na seba nadväzujú. Vzťah medzi týmito činnosťami môže byť rôzny a to napr.: nezávislosť, časová následnosť alebo vzájomná podmienenosť apod.

Sieťová analýza používa na reprezentáciu riešených problémov najmä formu grafu, ktorý je tvorený množinou vrcholov. Takýto graf sa dá jednoducho interpretovať a práve pri tomto druhu analýz má väčšiu hodnotu ako slovný popis danej problematiky.

Sieťová analýza patrí medzi najčastejšie používané analytické postupy analýzy (BREZINA, ČIČKOVÁ,GEŽÍK, 2012).

3.2.1. Teória grafov

Vývoj teórie grafov

Fundamentálne začiatky teórie grafov sú spojené s riešením úloh tzv. rekreačnej matematiky v 18. storočí. Základy teórie grafov formovali matematici riešiaci problémy, pri ktorých bola možná abstrakcia od povahy zadania. Grafy sa javia ako vhodný prostriedok na zobrazenie situácií, ktoré sa dajú znázorniť pomocou konečnej množiny bodov a vzťahov medzi nimi.

Začiatky teórie grafov sú historický spojené s menom Leonhard Euler, ktorý ako prvý použil pri riešení problémov grafické znázornenie a svoje poznatky zhrnul v práci Solutio problemas ad geometriam situs pertinentis.

Gustav Robert Kirchhoff bol ďalším, ktorý vo svojej práci použil grafické znázornenie a je možné ho považovať za zakladateľa teórie grafov nakoľko rozpracoval niektoré otázky z teórie stromov.

Pojem graf tak ako ho dnes vnímame my použil po prvý krát James Joseph Sylvester.

V súčasnej dobe predstavuje teória grafov resp. sieťová analýza kombináciu matematiky s inými obormi, v našom prípade ekonómiou, avšak na riešenie problémov možno použiť aj iné technické vedy. Aplikačné možnosti sú dané vlastnosťami technických a ekonomických systémov, ktoré sú súčasťou určitej priestorovej štruktúry, resp. sú priestorovou štruktúrou, alebo tieto systémy zodpovedajú udalostiam a časovou následnosťou a väzbami medzi nimi.

Pod pojmom problém si predstavujeme formuláciu, ktorá obsahuje podstatné parametre[2]. Podobne ako metóda lineárneho programovania ale aj ďalšie metódy, ktoré sú popísané v jednotlivých kapitolách, aj sieťová analýza využíva matematický model. V tomto prípade ide o model, ktorý predstavuje zjednodušené zobrazenie, resp. reprezentáciu reálnych vzťahov a väzieb medzi činnosťami.

Na riešenie problémov sieťovej analýzy sa používajú externé algoritmy. Tieto algoritmy sa používajú podľa zložitosti danej úlohy, pričom vedú k rýchlemu a efektívnemu riešeniu. V sieťovej analýze existujú aj problémy, ktoré nie je možné v reálnom čase pomocou takýchto algoritmov riešiť a preto sa používajú heuristické alebo metaheurisitké metódy (BREZINA, ČIČKOVÁ,GEŽÍK 2012).

Heuristické metódy sú postupnosťou krokov, ktoré umožňujú nájsť v reálnom čase tzv. suboptimálne riešenie[3]. Aj keď takéto metódy nezaručujú optimálnosť riešenia, umožňujú za pomerne krátky čas vypočítať prípustné riešenie aj v zložitejších úlohách. Heuristická metóda teda predstavuje určitý špeciálny postup krokov na riešenie konkrétneho typu úloh (PALÚCH 2008).

Metaheuristické metódy sú také, ktoré nám umožňujú riešenie zložitých úloh tak, že za určitých okolností dosahujeme lokálne minimum tam, kde sa nedajú použiť heuristické metódy (BREZINA, ČIČKOVÁ,GEŽÍK 2012).

[2] Pojem problém sa používa nie len v sieťovej analýze ale v širokom spektre iných metód, ktoré sú popísané v tejto práci.
[3] Riešenie nie je najlepšie možné, nezaručuje celkovú optimálnosť.

Základné pojmy z teórie grafov a sieťovej analýzy

Pred riešením samotných príkladov je nutné stanoviť si základné pojmy, ktoré sú ďalej v tejto práci použité. V prvom rade sú uvedené základné pojmy teórie grafov a sieťovej analýzy.

Pojem graf je možné charakterizovať ako objekt, ktorý vznikne spojeným dvoch a viacerých vrcholov (uzlov). Vrcholy je nutné spojiť čiarou (hrana grafu), pričom je nepodstatné ako je táto čiara (hrana) reprezentovaná. Matematický zápis grafu je: $G = (V, E)$ alebo $G = (V, A)$, kde sa rozlišuje, či ide o graf orientovaný alebo neorientovaný. V prípade neorientovaného grafu značí písmeno G graf, V je množina uzlov (vertex) a E je množina neorientovaných hrán (edges). Orientovaný graf sa označuje rovnako až na výnimku, kde písmeno A znamená množinu orientovaných hrán (arc).

Ak je hrana e tvorená uzlami u a v použijeme označenie $e = \{u, v\}$ v prípade, že ide o neorientovanú hranu a $e = (u, v)$ v prípade hrany orientovanej.

„Neorientovaným grafom rozumieme graf, ktorého všetky hrany sú neorientované“ (ŠUBRT, 2011, s 272).

„Orientovaným grafom rozumieme graf, ktorého všetky hrany sú orientované“ (ŠUBRT, 2011, s 272).

„Čiastočne orientovaným grafom rozumieme graf, ktorý obsahuje orientované aj neorientované hrany zároveň.“ (ŠUBRT, 2011, s 272).

Konečný graf má konečný počet uzlov a hrán.

Cesta je postupnosť hrán v orientovanom grafe, v ktorom každá hrana vychádza z uzla, v ktorom končí hrana predchádzajúca. Ak cesta začína a končí v rovnakom uzle ide o cyklus, pričom pojem acyklický graf označuje taký graf, v ktorom nie je cyklus.

Sieťová analýza[4] používa pojem sieťový graf definovaný ako ohodnotená, orientovaná grafická štruktúra, ktorá predstavuje sieťový model projektu. Základnými prvkami takéhoto grafu sú hrany alebo uzly, podľa toho hovoríme o hranovo alebo uzlovo orientovaných grafoch.

[4] Rozdielnosť pojmov v sieťovej analýze a teórie grafov

„Ak hrana e obsahuje uzol v, hovoríme, že e a v spolu incidujú. Uzly ktoré incidujú s rovnakou hranou sa nazývajú susedné uzly alebo stručne susedia. Množina všetkých susedných uzlov v sa nazýva okolie uzla v.

Počet hrán, ktoré s uzlom incidujú, sa nazýva stupeň uzla. Počet hrán, pre ktoré je daný uzol počiatočný, resp. koncový, sa nazýva výstupný, resp. vstupný stupeň uzlu. Uzol s vstupným stupňom 0 býva označovaný pojmom počiatočnú uzol grafu, vstupný uzol, vstup. Uzol s výstupným stupňom 0 býva označený ako koncový uzol grafu, výstupný uzol, výstup.“ (ŠUBRT, 2011, s271, 272).

Uzol z hľadiska sieťovej analýzy predstavuje určitú dosiahnutú činnosť. Z uzlu grafu sa dá vyčítať okamih začatia alebo ukončenia danej činnosti alebo súboru činností a teda vyjadruje logickú následnosť medzi činnosťami, pričom činnosti ktoré z uzla vystupujú nemôžu začať skorej, ako skončia všetky činnosti, ktoré do uzla vstupujú.

Hrana grafu spája uzly a určuje orientáciu grafu. V prípade ako nie je určené poradie vrcholov hovoríme o neorientovanej hrane. Takáto hrana nemá daný smer a umožňuje obojstranný pohyb medzi uzlami, ktoré spája. Orientovaná hrana je taká, ktorá je definovaná dvojicou uzlov, pričom záleží na ich poradí (jeden uzol je vstupný a jeden (výstupný). Táto hrana má smer od počiatočného (vstupného) uzla ku koncovému (výstupnému) uzlu. Na zakreslenie orientovanej hrany v grafe sa používajú orientované úsečky alebo oblúky ktoré znázorňujú smer pomocou šípok. To, ako sa delia grafy podľa orientácie je uvedené vyššie.

Hrana v sieťovom grafe predstavuje činnosť, ktorá je reálna (skutočne vykonaná) alebo fiktívna. Reálna činnosť sa značí plnou čiarou, zatiaľ čo činnosť fiktívna sa značí čiarkovane.

Medzi ďalšie pojmy, ktoré sa týkajú sieťovej analýzy patrí, projekt, činnosť a udalosti. Projekt je súbor činností a udalostí spojený s prácou, zmenou finančných a materiálnych prostriedkov určených na dosiahnutie cieľa. Činnosť alebo úloha je organizačne vymedzený plán práce. Činnosti sú v projekte usporiadané podľa časového harmonogramu, ktorý vyplýva z technologických závislostí daného projektu. Udalosť je začiatok a koniec činnosti alebo iný dôležitý termín.

Na základe zadania projektu ohodnotíme daný graf časovými údajmi. Musíme dodržať ďalšie charakteristiky ako je konečnosť, súvislosť, orientovanosť, acyklyckosť a to, že graf je uzlovo alebo hranovo ohodnotený a existuje v ňom jeden počiatočný a jeden koncový uzol, hovoríme o tzv. sieťovom grafe.

Na základe uvedených pojmov vyplýva, že na zostavenie sieťového grafu je nutné dodržať niektoré kroky resp. postup zostavenia grafu:

a) V prvom rade je nutné vytvoriť zoznam všetkých činností potrebných na realizáciu projektu a vytvorenie väzieb medzi nimi[5].
b) Vytvorenie grafického modelu na základe vytvorených väzieb jednotlivých činností a následné ohodnotenie grafu.
c) Výpočet všetkých charakteristík daného sieťového grafu, ich analýza a vyvodenie záverov pre činnosti projektu a projektu ako celku.

3.2.2. Plánovanie projektov

Plánovanie projektu je východiskový bod pre jeho riadenie. Aj keď plánovanie je nevyhnutné najmä u veľkých projektov, aj pri projektoch menších rozmerov má svoje využitie nakoľko ovplyvňuje kvalitu celého projektu. Plánovanie je definovanie výsledku projektu a detailný popis všetkého, čo je potrebné na dosiahnutie danej kvality tak, aby bol dodržaný rozpočet aj časový plán. Veľkú množinu metód efektívneho riadenia projektov tvoria práve sieťové metódy.

Metódy sieťovej analýzy umožňujú efektívne plánovanie a kontrolu nad jednotlivými časťami projektu. Sieťový graf umožňuje názorné zobrazenie celého projektu, jeho činností a časovú nadväznosť medzi nimi. Sieťový graf je navyše možné ľahko prispôsobiť rôznym úpravám projektu.

Metóda CPM

Metóda využíva uzlovo definované sieťové grafy. Uzly sú konjunktívne-deterministické[6], t.j. každý uzol sa realizuje po skončení všetkých činností, ktoré do neho vstupujú a realizácia uzlu vyvolá realizáciu všetkých činností, ktoré z neho vystupujú.

[5] Časová následnosť, súbežnosť a vzájomná závislosť
[6] Konjunktívny vstup, deterministický výstup

Metoda CPM rieši časovú analýzu pričom sleduje dva základné ciele a to: určenie kritickej cesty a určenie rezerv. Východiskom pre časovú analýzu sú činnosti a ich doby trvania. V tejto metóde sa rovnako možne zadať plánovaný termín zahájenia a dokončenia projektu. Zo zadaných hodnôt sú vypočítané najprv najskôr možné a najneskôr prípustné termíny pre všetky činnosti a uzly.

Metóda PERT

Podobne ako metóda CPM aj metóda PERT sa používa na časovú analýzu projektov s využitím hranovo orientovaného grafu s deterministickou štruktúrou. Na rozdiel od metódy CPM však ide o stochastické ohodnotenie sieťového grafu preto aj metóda PERT patrí medzi stochastické metódy. Doby trvania činností sú chápané ako náhodná veličina s určitou pravdepodobnosťou. Pri metóde PERT sa používajú tri odhady:

- Optimistický odhad a_{ij} – najkratšie možné trvanie činnosti a_{ij}, ak sa nevyskytnú žiadne problémy.
- Najpravdepodobnejší odhad m_{ij} (modus) – najpravdepodobnejšia hodnota trvania činnosti, pri bežných podmienkach.
- Pesimistický odhad b_{ij}– najdlhšie trvanie činnosti za predpokladu mimoriadne zlých podmienok pre realizáciu.

Pri určovaní odhadov sa berú do úvahy iba tie vplyvy, ktoré sú zároveň náhodné javy. Časové odhady sa počas diania projektu stále spresňujú a aktualizujú.

Metóda PERT umožňuje vykonať pravdepodobnostnú analýzu projektu, že projekt bude splnený v čase, ktorý neprekročí plánovaný čas dokončenia. Ako u každej stochastickej veličiny existuje pravdepodobnosť, že hodnota veličiny bude menšia prípadne väčšia.

Metóda GERT

Metóda GERT sa používa pri projektoch, ktoré sa môžu uskutočniť viacerými spôsobmi. Takéto viac variantné projekty sú najčastejšie vo výskume, kde budúci priebeh činností závisí od výsledkov činností predchádzajúcich.

Metóda GERT preto využíva trochu iný typ grafu na zobrazenie práve takýchto projektov. Uzly grafu predstavujú udalosti a hrany predstavujú činnosti. U uzlov sa rozlišuje vstupná a výstupná časť. Vstupná časť môže byť:

- Konjunktívna – uzol sa realizuje iba po realizácií všetkých vstupujúcich činností
- Disjunktívna – uzol sa realizuje po realizácií práve jednej činnosti z všetkých vstupujúcich činností
- Inkluzívna – uzol sa realizuje práve vtedy, keď sa realizuje aspoň jedna vstupujúca činnosť, následne sa môže realizovať aj zvyšok činností

Vstupná časť môže byť:

- Deterministická – po realizácií uzlu sa realizujú všetky výstupné činnosti
- Stochastická – po realizácií uzlu sa realizuje iba jedna činnosť zo všetkých výstupných činností. Každá z týchto činností má určitú pravdepodobnosť realizácie pričom súčet podmienených pravdepodobností sa rovná 1

Na pravdepodobnostnú analýzu činností nadväzuje časová analýza, pričom výpočty sa líšia podľa druhu uzla.

Metóda MPM

Metóda je založená na uzlovo definovanom sieťovom grafe oproti predchádzajúcim metódam, ktoré využívajú hranovo definované sieťové grafy. Činnosti sú v tomto prípade vyjadrené uzlami a hrany znázorňujú vzťahy medzi činnosťami – ich časovú nadväznosť. Jednotlivé činnosti projektu sa zobrazujú v tvare štvoruholníka a časové nadväznosti činností orientovanými hranami. Ohodnotenie uzlov predstavuje doby trvania činností. Pri metóde MPM je možné ohodnotiť aj väzby medzi činnosťami (hrany) a to dvoma spôsobmi:

a) Prvý spôsob predpokladá existenciu minimálneho časového úseku, odstupu, medzi dvoma po sebe idúcimi, rozdielnymi činnosťami.
b) Druhý spôsob predpokladá existenciu maximálneho prístupného odstupu , medzi dvoma po sebe idúcimi, rozdielnymi činnosťami.

V metóde MPM sa medzi väzbami značí aj potenciál väzby, ktorý existuje pre za sebou nasledujúce činnosti.

- Kladný potenciál (a_{ij}) väzby udáva minimálny časový odstup dvoch po sebe idúcich udalostí.

- Záporný potenciál (b_{ij}) väzby udáva maximálny časový odstup dvoch po sebe idúcich udalostí.

Vďaka potenciálom je možné vykonávať zmeny v sieťovom grafe len pomocou zmeny potenciálu (zmenou časového ohodnotenia činnosti).

Model MPM nemusí mať vždy riešenie. Vzťah medzi kladným a záporným potenciálom musí spĺňať určite podmienky napr.: $a_{ij} \leq b_{ij}$, pričom každú väzbu je možne ohodnotiť zároveň pozitívnym aj negatívnym potenciálom, ak však nie je uvedené a_{ij}alebo b_{ij}potom $a_{ij} = 0$ alebo $b_{ij} = 0$.

Pre kladný potenciál medzi nasledujúcimi udalosťami u_ia $u_j$platí[7]: $tu_j \geq u_i + a_{ij}$

a) $a_{ij} > 0$ – udalosť u_j môže nastať najskôr a_{ij}časových jednotiek po udalosti u_i.
b) $a_{ij} = 0$ – udalosti u_i a u_j môžu nastať súčasne.
c) $a_{ij} < 0$ – udalosť u_j môže nastať najskôr a_{ij}časových jednotiek pred udalosti u_i.

Pre záporný potenciál medzi nasledujúcimi udalosťami u_i a u_j platí: $tu_j \leq u_i + b_{ij}$

a) $b_{ij} > 0$ – udalosť u_i môže nastať najneskôr b_{ij} časových jednotiek po udalosti u_j.
b) $b_{ij} = 0$ – udalosti u_i a u_j môžu nastať súčasne.
c) $b_{ij} < 0$ – udalosť u_j môže nastať najneskôr b_{ij} časových jednotiek pred udalosti u_i.

Záporný potenciál sa v praxi nevyužíva.[8]

Metóda PDM

PDM je v podstate ako synonymum pre uzlovo definovane sieťové grafy. Zároveň však mnoho, prevažne amerických, autorov nahliada na PDM ako na samostatnú metódu, ktorá využíva uzlovo definovane sieťové grafy a umožňuje určiť časove rezervy, kritickú cestu a ďalšie údaje rovnako ako metódy CPM alebo MPM. PDM ako metóda bola podľa Strettona (Stretton 2007) vyvinutá Johnom Fondahlom zo Stanfordskej univerzity v USA a prvýkrát publikovaná v roku 1961. Jeho metóda zobrazovala činnosti ako uzly a väzby medzi činnosťami ako šípky a používala štyri druhy logických závislostí. Taktiež

[7] t – doba trvania činnosti
[8] Použitie záporného potenciálu sa využívalo v prípade závislosti Z-Z (začiatok-začiatok)

zaviedol tzv. „leads and lag times“, teda časove odstupy, ktoré vlastne odpovedajú kladnému potenciálu u metódy MPM (s kladnou alebo zápornou hodnotou potenciálu).

3.2.3. Teória hier

Je ďalšou relatívne samostatnou disciplínou operačnej analýzy. Aj napriek tomu, že medzi teóriou hier a matematickým programovaním je určitá súvislosť, teóriu hier charakterizuje viacero zvláštností, ktoré jej vymedzujú v operačnej analýze osobitné postavenie. Teória hier - podobne ako matematické programovanie - rieši problematiku optimálneho rozhodovania a na tento účel využíva exaktný matematický aparát. V úlohách matematického programovania sa však nepredpokladá nijaká konfliktná situácia. Rozhodovací subjekt sa pri voľbe svojej stratégie nestretáva s aktívnou protiakciou iného subjektu (resp. protivníka), ktorý by svojim konaním jeho rozhodnutia zámerne maril. Naproti tomu pri teórii hier ide o situácie, ktoré sú svojou povahou typicky konfliktné. To znamená, že proti sebe stoja subjekty s čiastočne alebo úplne protichodnými záujmami. Aspoň jeden z týchto subjektov má cieľavedomé správanie a toto svoje správanie upravuje podľa rozhodnutia druhej strany (ĎUĎÁK, 2010).

3.2.4. Ekonometria

Ekonometria je matematická metóda, resp. vedná disciplína, používaná v ekonómií a zaoberá sa kvantifikáciou ekonomických vzťahov. Presnejšie povedané, zaoberá sa empirickým odhadom parametrov ekonomických vzťahov (HATRÁK, 2007). Môžeme povedať, že ekonometria je spojenie ekonómie, matematiky a štatistických metód. Termín ekonometria prvý krát použil ekonóm Pawel Ciompa v roku 1910 v práci Zarys ekonometryi i teorya buchalteryi. Medzi popredných predstaviteľov ekonometrie patria P. Samuelson, T. Koopmans a R. Stone, ktorí stáli pri zrode ekonometrie ako vednej disciplíny a definovali ju ako:

„... kvantitatívnu analýzu skutočných ekonomických javov, založenú na súčasnom rozvoji teórie a pozorovania, za pomoci vhodných metód štatistickej inferencie. ...“ (SAMUELSON, KOOPMANS, STONER, 1954).

Učebnicová definícia ekonometrie podľa A. Goldberga znie:

„Ekonometriu možno definovať ako sociálnu vednú disciplínu, ktorá na analýzu ekonomických javov používa nástroje ekonomickej teórie, matematiky a štatistickej inferencie“ (GOLDBERG, 1964).

Posledná definícia pochádza od jedného z najznámejších ekonometrov H. Theila a znie:

„Ekonometria sa zaoberá empirickým stanovením ekonomických zákonov“ (THEIL, 1971)

Tri horeuvedené definície ako aj definície ďalších autorov vychádzajú z toho, že ekonometria ma interdisciplinárny pôvod a charakter: ekonometria vznikla spojením ekonomickej teórie, matematickej ekonómie, ekonomickej štatistiky a ekonomickej štatistiky. Zjednodušene by sa dalo povedať, že sa ekonometria zaoberá odhadovaním ekonomických vzťahov a výberových dát a testovaním hypotéz o vzťahoch medzi ekonomickými premennými, pričom skúma:

- Existenciu vzťahov medzi premennými
- Smer závislosti medzi premennými
- Veľkosť závislosti medzi premennými

Keďže je to empirická disciplína, vo svojich logických základoch sa podobá iným a značne vzdialeným empirickým disciplínam ako je biometria, psychometria a pod. Uvedeným vedným disciplínam je spoločný prístup k skúmanie nejakého javu: navzájom sa porovnáva viacero teoretických hypotéz aby sa zistilo, ktorá z nich najlepšie zodpovedá empirickým faktom, tj. nameraným dátam. Zdrojom týchto hypotéz pre ekonometriu je väčšinou ekonomická teória. Sformulované hypotézy majú vo svojej prvej podobe väčšinou kvalitatívnu povahu. (HATRÁK, 2007) Pre potreby praktického ekonomického rozhodovania je nutné tieto hypotézy kvantifikovať.

Napríklad z mikroekonomickej teórie firmy vyplýva, že objem výstupu Q je funkciou výrobných faktorov $X_1, X_2, \dots, X_n$:

$$Q = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Matematický tvar tohto vzťahu však nevyplýva z teórie a teda z nej nemožno odvodiť ani numerické hodnoty jednotlivých parametrov, ktoré by vyjadrovali vplyv zmeny jednotlivých parametrov na produkciu. Uvedená hypotéza je teda kvalitatívna nakoľko konštatuje vplyv zmeny faktora X_i na produkciu Q a prípadne hovorí niečo o smere zmeny tohto vplyvu, neposkytuje však kvantitatívnu mieru tejto zmeny.

Podobný príklad je Keynesova teória ktorá tvrdí, že osobná spotreba obyvateľstva C pozitívne závisí od disponibilného príjmu X, ale už neodpovedá na otázku, akú veľkú zmenu spotreby vyvolá zvýšenie, resp. zníženie disponibilných príjmov obyvateľstva o Y korún.

Stanovenie daných hodnôt je niekedy mimo možností ekonomickej teórie. Práve vtedy musíme použiť analýzu dát závislých aj nezávislých premenných pri dostatočnej realizácií daného vzťahu. Ako príklad môžem uviesť štatistické údaje o hodnotách výrobných faktorov konkrétne práce L a kapitále K a im zodpovedajúce hodnoty objemu produkcie Q. Z ekonomickej teórie vyberiem prípustnú hypotézu v tomto prípade Cobbovu-Douglasovu produkčnú funkciu (COBB, DOUGLAS, 1928):

$$Q = \beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2} ,$$

kde $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ sú parametre, ktorých hodnoty nepoznáme a teda jedinou cestou k ich výpočtu je ich odhadnutie na základe dostatočne veľkého počtu trojíc Q_i, L_i, K_i, pretože tu sa ukrýva kvantitatívna stránka vzťahu.

Ekonometrická analýza ma niekoľko vstupov a krokov, ktoré prebiehajú v nasledujúcom poradí:

1) Vstup z ekonomickej teórie, z ktorej vyplýva ekonomický model, ktorý však nie je jednoznačný ale ide o jednu z niekoľkých možných alternatív.
2) Fakty o skutočnom priebehu javu (empirické dáta). Až pri porovnaní empirických dát s ekonomickou teóriou získavame údaje, resp. numerické hodnoty parametrov vo skúmanom vzťahu, ktoré sa použijú pri rozhodovaní.
3) Metódy odhadu parametrov a metódy testovania týchto parametrov.

Vyššie uvedené vstupy nám dávajú empirický obsah ekonomickej teórie (HATRÁK, 2007).

Výsledkom doleuvedených krokov ekonometrickej analýzy je kvantifikovaný ekonometrický model[9]:

1) Formulácia ekonomických hypotéz – vychádzame z ekonomickej teórie.
2) Získanie dát – získané dáta sa líšia od dát z iných vedných disciplín na koľko nie sú výsledkom kontrolovaných experimentov, ale sú pasívne odpozorované (HATRÁK, 2007).
3) Kombinácia hypotéz.

Ekonometrický model

Pojem model ako taký je uvedený v úvode teoretickej časti tejto práce. Ide o zjednodušenú, najčastejšie matematickú reprezentáciu reálneho objektu, vzťahu alebo procesu, pričom slúži na analýzu vzťahu alebo viacerých vzťahov v rámci objektu, na simuláciu alebo prognózu vývoja objektu a na jeho riadenie. Pri tvorbe ekonometrického modelu musíme dodržať určité kritéria, resp. postup:

1) Špecifikácia ekonometrického modelu - ekonomická časť - definuje závislé a nezávislé premenné na základe ekonometrickej teórie; štatistická časť – definuje štatistické vlastnosti náhodných premenných v modely.
2) Dáta – zber, spracovanie a analýza výberových dát.
3) Odhad – aplikácia odhadovej metódy, kde pri použití výberových dát vypočítame hodnoty neznámych parametrov v modely.
4) Verifikácia – testovanie, či je odhadnutý model štatisticky kompatibilný s použitými metódami.

Dáta v druhom kroku delíme na :

a) Prierezové (Cross-sectional) – napr. výber z populácie v čase t, údaje o domácnostiach, firmách atď. Pričom ide typicky o mikroekonomické údaje.
b) Časové rady (Time series) – pozorovanie premennej v chronologicky zoradených časových okamihoch napr. veľkosť HDP, cien akcii atď. Ide o makroekonomické údaje.

[9] Model, ktorého parametre sú štatisticky odhadnuté na základe empirických dát pomocou ekonometrických techník

c) Panelové dáta (Panel data)– časový rad pozorovaný pre každý prierezový člen v databáze.

3.2.5. Štruktúrna analýza

Je bilančná metóda, ktorá pomocou matematického modelu charakterizuje reprodukčný proces určitého ekonomického systému z hľadiska kvantitatívnych vzťahov medzi jednotlivými odvetviami a s ohľadom na ich proporcionálny rozvoj. Na rozdiel od úloh matematického programovania nehľadá štruktúrna analýza optimálnu štruktúru s prihliadnutím na určité kritérium, ale iba skúma podmienky rovnováhy v rámci určitého, relatívne obmedzeného systému (ĎUĎÁK, 2010).

Hore uvedené príklady matematických metód sa okrem iných, ktoré sú popisované v jednotlivých kapitolách bežne používajú pri riešení reálnych situácií. V práci nie sú popisované všetky metódy ale iba tie, ktoré boli vybraté na základe predchádzajúcich skúseností, je kladený dôraz na ich čo najlepšiu interpretáciu.

Medzi ďalšie ekonomicko-matematické metódy patrí:

- Teória hromadnej obsluhy
- Teória zásob
- Teória obnovy
- Metóda dátových obalov - DEA

4. Analýza súčasného stavu

Pojem matematické metódy v ekonómii[10] zahŕňa metódy na matematickom základe, ktoré sa používajú v ekonomickej oblasti a to prevažne v oblasti riadenia a organizácie.

Matematické metódy majú tieto charakteristiky:

- Systémový prístup – javy a procesy sú chápané komplexne, so všetkými súvislosťami
- Používanie modelovej techniky
- Použitie špeciálnych metód a algoritmov
- Použitie výpočtovej techniky
- Ustálený postup riešenia

Operačnú analýzu je možno chápať ako vednú disciplínu, ktorá popisuje systém definovaný ako účelová množina prvkov a vzťahov medzi nimi. Takto popísaný systém sa javí ako celok s patričnými vlastnosťami.

Vyššie uvedený systém je potom nahradený modelom. Model je zámerne zjednodušený obraz reálneho sveta prenesený resp. prepísaný do matematického jazyka za pomoci abstraktných matematický prostriedkov za účelom jeho poznania.

Takýto model má význam pretože:

- Umožňuje popis systému v akomkoľvek stave
- Urýchľuje interakciu
- Rýchle vyhodnocovanie zmien v dôsledku zmeny systému bez strát
- Riešenie problémov za pomoci výpočtovej techniky

Ekonomicko-matematické metódy a s nimi súvisiaca modelová tvorba v súčasnosti s výpočtovou technikou sa stávajú čoraz významnejším nástrojom. Matematické modelovanie ekonomických procesov a javov zaujíma postupne miesto vo všetkých odvetviach hospodárstva. Rozmanitosť a špecifickosť jednotlivých problémov, pri riešení ktorých možno aplikovať techniku modelovej tvorby, vyžaduje konštrukciu a uplatnenie modelov rozličných typov. Z toho dôvodu ani okruh ekonomicko-matematických metód

[10] Matematicko-ekonomické metódy, alebo aj operačná analýza.

nie je celkom uzatvorený. Potreba riešiť jednotlivé ekonomické problémy si vyžaduje vznik stále nových metód (ĎUĎÁK 2010).

Problémy, v ktorých je možné využitie matematických metód je mnoho.

Lineárne programovanie je nástroj finančného plánovania podniku. Umožňuje nájsť optimálne riešenie podľa zadanej účelovej funkcie a obmedzujúcich podmienok pomerne nenáročným spôsobom. Problémy lineárneho programovania je možné riešiť pomocou tabuľkových editorov (napr. MS Excel), ktorý sa používa ako bežný nástroj ekonomickej analýzy.

Na strane druhej je lineárne programovanie deterministické a teda neumožňuje prihliadať na náhodné činitele. Preto môže dochádzať k nepresným výsledkom.

Práve preto je lineárne programovanie vhodným nástrojom na plánovanie v kratšom časovom období, nakoľko krátkodobý model presnejšie aproximuje ekonomické závislosti.

Jednou zo skupín plánovacích úloh, ktoré možno vhodným spôsobom riešiť prostredníctvom lineárneho programovania, sú úlohy s maximalizáciou zisku, resp. minimalizáciou nákladov, pri rôznych ohraničujúcich podmienkach v závislosti od oblasti, ktorej sa plánovací problém týka. Príkladom môžu byť rôzne personálne problémy, kde sa snažíme určiť optimálny počet zamestnancov určitého oddelenia pri minimálnych mzdových nákladoch v závislosti od množstva úloh a pracovného času, výrobné problémy, kde sa optimalizuje množstvo vyrobenej produkcie pri maximalizácii zisku z ich predaja a ohraničeniach na výrobné faktory a pod.

Zaujímavou aplikáciou lineárneho programovania vo finančnom plánovaní je model LONGER od autorov S. C. Myers a G. A. Pogue (MYERS, S. C. POGUE, G. A. 1973), ktorý spája plánovanie projektov rozvoja, dividendovej politiky a finančnej štruktúry podniku do jedného optimalizačného modelu.

Firma MUDr. Danica Marečková s.r.o. používa lineárne programovanie na minimalizáciu nákladov pri nákupe materiálu.

Využitie sieťovej analýzy má uplatnenie najmä v oblasti plánovania projektov. Najčastejšie použité metódy sú CPM a PERT. Metóda PERT sa využíva u projektov, kde nevieme presne dĺžku trvania (aspekty projektu sa menia). Tieto projekty majú stochastický charakter. Cieľom je usporiadanie činností tak, aby projekt skončil s veľkou pravdepodobnosťou v plánovanom čase. Využíva sa najmä v logistike. Metóda CPM sa používa v prípade, keď vieme doby trvania jednotlivých činností. Riadenie alebo plánovanie projektov obsahuje viac procesov ako iba sieťová analýza a využíva sa v každom podniku. Správne riadenie projektu vedie k maximalizácií účinnosti a predchádzaní problémov s ktorými môže súvisieť napr. následné zvyšovanie nákladov a pod.

Ekonometria sa používa v oblastiach hospodárstva najmä pri predikcií vzniku alebo vývoja finančných kríz, HDP a pod. (KÁČER 2013).

Pri predikcií vývoja HDP sa používajú plošné dáta. Ide o údaje získané z oblasti, ktorá je definovaná určitou hranicou (štáty, regióny, ...). predikcia finančných kríz je predmetom finančnej ekonometrie, ktorá využíva rôzne metódy ekonometrického modelovania na analýzu údajov z časových rád.

Teória hier sa uplatňuje v procesoch rozhodovania. V ekonomike je teória hier využívaná na analýzu veľkého množstva ekonomických javov ako napr. trh, aukcie, výpredaje, duopoly, oligopoly, sociálna sieť a volebné systémy. Tento výskum sa zvyčajne zameriava na určitý súbor stratégií známych ako equilibrium (rovnováha) v hrách.

Teória hier bola použitá na vytvorenie „stabilných trhových alokácií a praktický návrh trhov" v roku 2012. Teóriu hier aplikovali americký ekonómovia Alvin E. Roth a Lloyd S. Shapley (NOBELPRIZE).

Využitie štruktúrnej analýzy v ekonomike sa zameriava na plánovanie na národnej aj podnikovej úrovni.

5. Vlastné návrhy riešení

Nasledovné kapitoly praktickej časti sú venované príkladom, v ktorých bude bližšie popísaná a prakticky znázornená problematika vybraných kapitol teoretickej časti. [11]

5.1. Výrobný plán a maximalizácia zisku

Popis problematiky

Firma sa zaoberá výrobou valivých ložísk na rôzne použitie. Cieľom optimalizácie výroby je dosiahnutie maximálneho zisku.

Firma vyrába ložiská na zariadeniach $Z1, Z2, Z3, Z4, Z5$, ktoré sú k dispozícii v šiestich veľkostiach: $V1, V2, V3, V4, V5, V6$.

K výrobe ložiska veľkosti $V1$ je potrebný čas:

1 hodina na zariadení $Z1,$ 2 hodiny na zariadení $Z2,$ 2 hodiny na zariadení $Z3,$ 4 hodiny na zariadení $Z4,$ 3 hodiny na zariadení $Z5$

K výrobe ložiska veľkosti $V2$ je potrebný čas:

3 hodiny na zariadení $Z1,$ 1 hodina na zariadení $Z2,$ 2 hodiny na zariadení $Z3,$ 5 hodiny na zariadení $Z4,$ 2 hodiny na zariadení $Z5,$

K výrobe ložiska veľkosti $V3$ je potrebný čas:

2 hodiny na zariadení $Z1,$ 4 hodiny na zariadení $Z2,$ 5 hodiny na zariadení $Z3,$ 2 hodiny na zariadení $Z4,$ 4 hodiny na zariadení $Z5$

K výrobe ložiska veľkosti $V4$ je potrebný čas:

1 hodiny na zariadení $Z1,$ 1 hodiny na zariadení $Z2,$ 4 hodiny na zariadení $Z3,$ 6 hodiny na zariadení $Z4,$ 3 hodiny na zariadení $Z5$

K výrobe ložiska veľkosti $V5$ je potrebný čas:

3 hodiny na zariadení $Z1,$ 2 hodiny na zariadení $Z2,$ 1 hodiny na zariadení $Z3,$ 3 hodiny na zariadení $Z4,$ 5 hodiny na zariadení $Z5$

K výrobe ložiska veľkosti $V6$ je potrebný čas:

2 hodiny na zariadení $Z1,$ 5 hodiny na zariadení $Z2,$ 1 hodiny na zariadení $Z3,$ 2 hodiny na zariadení $Z4,$ 4 hodiny na zariadení $Z5$

[11] Údaje nasledujúcich kapitol a tabuľky z nich vytvorené sú mojou prácou

Podnik má na výrobu jednotlivých výrobkov nasledujúci časový limit:
185 hodín na zariadení $Z1$, 145 hodín na zariadení $Z2$, 200 hodín na zariadení $Z3$, 165 hodín na zariadení $Z4$,210 hodín na zariadení $Z5$

Podnik by mal za každé vyrobené zariadenie disponovať ziskom:
30 000kč pri variante $V1$, 20 000kč pri variante $V2$, 45 000kč pri variante $V3$, 34 000kč pri variante $V4$, 48 000kč pri variante $V5$, 50 000kč pri variante $V6$

Tabuľka 1 - využitie zariadení Z na výrobu variant V (zdroj: vlastné spracovanie)

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	Dispozičné množstvo
Z1 (hod.)	1	3	2	1	3	2	185
Z2 (hod.)	2	1	4	1	2	5	145
Z3 (hod.)	2	2	5	4	1	1	200
Z4 (hod.)	4	5	2	6	3	2	165
Z5 (hod.)	3	2	4	3	5	4	210
Zisk (Kč)	30000	20000	45000	34000	48000	50000	

Definovanie rozhodovacích premenných:

- $X1$ - počet vyrobených variant $V1$
- $X2$ - počet vyrobených variant $V2$
- $X3$ - počet vyrobených variant $V3$
- $X4$ - počet vyrobených variant $V4$
- $X5$ - počet vyrobených variant $V5$
- $X6$ - počet vyrobených variant $V6$

Obmedzujúca podmienka:

Výroba na strojoch je časovo obmedzená preto platí, že pri výrobe na zariadení nemôžeme prekročiť počet hodín:

$$Z1 \leq 185,\ Z2 \leq 145,\ Z3 \leq 200,\ Z4 \leq 165,\ Z5 \leq 210$$

Obmedzujúce podmienky pre zariadenia $Z1$-$Z5$:

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_2 + 2x_6 \leq 185$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 + 5x_3 \leq 145$$

$$2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + x_5 + x_6 \leq 200$$

$$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 5x_5 + 2x_6 \leq 165$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 210$$

Definovanie kritéria optimálnosti:

Cieľom firmy je maximalizácia zisku z výroby 6 druhov valivých ložísk. Na základe ziskov $ZV1$-$ZV6$ zostavíme účelovú funkciu zisku *Z*:

$ZV1 = 30000x_1$, $ZV2 = 20000x_2$, $ZV3 = 45000x_3$, $ZV4 = 34000x_4$, $ZV5 = 48000x_5$, $ZV6 = 50000x_6$

$$Z = 30000x_1 + 20000x_2 + 45000x_3 + 34000x_4 + 48000x_5 + 50000x_6$$

Definovanie podmienok nezápornosti:

$$x_{1,2,3,4,5,6} \geq 0$$

Výsledný matematický model:

Maximalizuj:

$$Z = 30000x_1 + 20000x_2 + 45000x_3 + 34000x_4 + 48000x_5 + 50000x_6$$

Za podmienok:

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_2 + 2x_6 \leq 185$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 + 5x_3 \leq 145$$

$$2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + x_5 + x_6 \leq 200$$

$$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 5x_5 + 2x_6 \leq 165$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 210$$

MS Excel

Nasledovným krokom je vyriešenie danej funkcie v doplnku riešiteľ MS Excel (tabuľka 2-5)

Tabuľka 2 – Zadanie (zdroj: vlastné spracovanie)

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	Dispozičné množstvo
Z1 (hod.)	1	3	2	1	3	2	185
Z2 (hod.)	2	1	4	1	2	5	145
Z3 (hod.)	2	2	5	4	1	1	200
Z4 (hod.)	4	5	2	6	3	2	165
Z5 (hod.)	3	2	4	3	5	4	210
Zisk (Kč)	30000	20000	45000	34000	48000	50000	

Tabuľka 3 – Výsledná funkcia (zdroj: vlastné spracovanie)

V1	V2	V3	V4	V5	V6
0	0	0	11,05634	20,49295775	18,5915493

Tabuľka 4 – Obmedzujúce podmienky (zdroj: vlastné spracovanie)

Obmedzujúce podmienky	
Z1	109,7183099
Z2	145
Z3	83,30985915
Z4	165
Z5	210

Tabuľka 5 – Výsledok účelovej funkcie (zdroj: vlastné spracovanie)

Účelová funkcia
2289154,93

Výsledná zostava

Tabuľka 6 - cieľová bunka (max.) (zdroj: vlastné spracovanie)

Bunka	Názov	Pôvodná hodnota	Výsledná hodnota
$L$12	Z1	0	2289154,93

Tabuľka 7 - premenné bunky (zdroj: vlastné spracovanie)

Bunka	Názov	Pôvodná hodnota	Výsledná hodnota	Celočíselné
$B$11	V1	0	0	Pokračujúce
$C$11	V2	0	0	Pokračujúce
$D$11	V3	0	0	Pokračujúce
$E$11	V4	0	11,05633803	Pokračujúce
$F$11	V5	0	20,49295775	Pokračujúce
$G$11	V6	0	18,5915493	Pokračujúce

Tabuľka 8 – obmedzenia (zdroj: vlastné spracovanie)

Bunka	Názov	Hodnota bunky	Vzorec	Stav	Odchýlka
$I$12	Z1	109,7183099	$I$12<=$H$3	Neplatí	75,28169014
$I$13	Z2	145	$I$13<=$H$4	Platí	0
$I$14	Z3	83,30985915	$I$14<=$H$5	Neplatí	116,6901408
$I$15	Z4	165	$I$15<=$H$6	Platí	0
$I$16	Z5	210	$I$16<=$H$7	Platí	0

Cislivostná zostava

Tabuľka 9 - premenné bunky (zdroj: vlastné spracovanie)

Bunka	Názov	Výsledné Hodnota	Znížené Náklady	Cieľ Koeficient	Prípustný Zväčšiť	Prípustný Zmenšiť
$B$11	V1	0	-4760,56338	30000	4760,56338	1E+30
$C$11	V2	0	-5267,605634	20000	5267,605634	1E+30
$D$11	V3	0	-1422,535211	45000	1422,535211	1E+30
$E$11	V4	11,05633803	0	34000	47272,72727	5753,846154
$F$11	V5	20,49295775	0	48000	9090,909091	5611,111111
$G$11	V6	18,5915493	0	50000	57777,77778	2020

Tabuľka 10 - obmedzenia (zdroj: vlastné spracovanie)

Bunka	Názov	Výsledné Hodnota	Tieňované Cena	Obmedzenie Pravá strana	Prípustný Zväčšiť	Prípustný Zmenšiť
$I$12	Z1	109,7183099	0	185	1E+30	75,28169014
$I$13	Z2	145	3577,464789	145	80,83333333	62,85714286
$I$14	Z3	83,30985915	0	200	1E+30	116,6901408
$I$15	Z4	165	1408,450704	165	132,2727273	46,17647059
$I$16	Z5	210	7323,943662	210	71,36363636	51,96428571

Limitná zostava

Tabuľka 11 - cieľová bunka (zdroj: vlastné spracovanie)

Bunka	Cieľ	Hodnota
	Názov	
$L$12	Z1	2289155

Tabuľka 12 - výsledok MS Excel (zdroj: vlastné spracovanie)

Bunka	Premenná	Hodnota	Dolná	Cieľ	Horná	Cieľ
	Názov		Hranica	Výsledok	Hranica	Výsledok
$B$11	V1	0	0	2289155	0	2289155
$C$11	V2	0	0	2289155	0	2289155
$D$11	V3	0	0	2289155	0	2289155
$E$11	V4	11,0563	0	1913239	11,056	2289155
$F$11	V5	20,493	0	1305493	20,493	2289155
$G$11	V6	18,5915	0	1359577	18,592	2289155

Výsledok z MS Excel sa interpretuje ako: maximálny zisk je 2 289 155Kč. Výsledok je numerická interpretácia funkcie: $Z = 30000x_1 + 20000x_2 + 45000x_3 + 34000x_4 + 48000x_5 + 50000x_6$ pričom išlo o maximalizáciu zisku.

5.2. Analýza projektu vytvorenia počítačovej siete

Popis problematiky

Firma si objednala vytvorenie projektu počítačovej siete v kancelárií a následné zavedenie danej siete vo svojich priestoroch novej kancelárskej budovy. Projekt je rozdelení na jednotlivé činnosti, ktoré sa budú v rámci vytvárania siete realizovať. Spolu s činnosťami boli stanovené predpokladané doby trvania jednotlivých častí projektu. Jednotlivé činnosti sú uvedené v tabuľke 13. Takto spracované údaje sú prehľadné a slúžia ako dobrý výstup na ďalšie spracovanie.

Tabuľka 13 - popis činností projektu (zdroj: vlastné spracovanie)

Činnosť	Popis činnosti	Predchádzajúca činnosť	Doba trvania		
			a	m	b
A	Predbežný návrh	-	5	8	10
B	Analýza stavu	-	4	6	7
C	Nákup materiálu	A	1	2	5
D	Príprava	B, C	2	4	6
E	Zavedenie káblov	D	7	10	14
F	Zapojenie počítačovej siete a komponentov	E	10	12	13
G	Inštalácia	E	4	5	8
H	Dodatočne nastavenia PC	G	3	5	7
I	Nastavenie bezpečnosti	F	2	3	4
J	Test bezpečnosti siete	I	1	2	3
K	Skúšobná prevádzka	I	3	4	6
L	Dokončenie	H, J	1	3	5

Hrano-hranová matica

Druhý krok je vytvorenie hrano-hranovej matice (tabuľka 14), ktorá udáva následnosť hrán v sieťovom grafe a tabuľky označenia rádov (tabuľka 15).

Tabuľka 14 - hrano-hranová matica činností (zdroj: vlastné spracovanie)

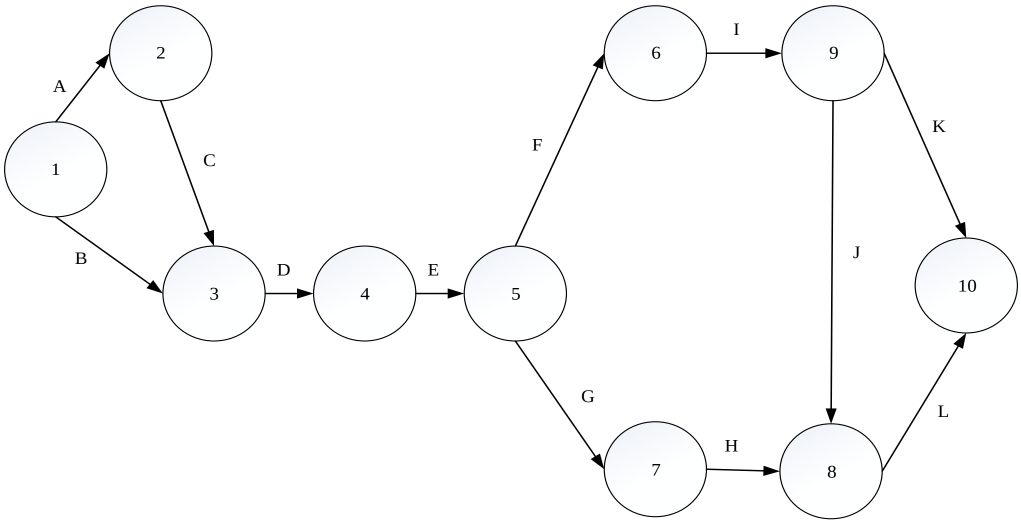
Hrano-hranová matica												
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A			1									
B				1								
C				1								
D					1							
E						1	1					
F									1			
G								1				
H												1
I										1	1	
J												1
K												
L												

Tabuľka 15 - označenie rádov (zdroj: vlastné spracovanie)

Rád													**Činnosť**
0.rád	0	0	1	2	1	1	1	1	1	1	1	2	A, B
1.rád	X	X	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	C
2.rád	X	X	X	0	1	1	1	1	1	1	1	2	D
3.rád	X	X	X	X	0	1	1	1	1	1	1	2	E
4.rád	X	X	X	X	X	0	0	1	1	1	1	2	F, G
5.rád	X	X	X	X	X	X	X	0	0	1	1	2	H, I
6.rád	X	X	X	X	X	X	X	X	X	0	0	1	J, K
7.rád	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	0	L

Sieťový graf

Nasleduje vytvorenie sieťového grafu (obrázok 1) v ktorom sú vyznačené uzly a orientované hrany spolu s označením činnosti podľa tabuľky 2.



Obrázok 1- sieťový graf (zdroj: vlastné spracovanie)

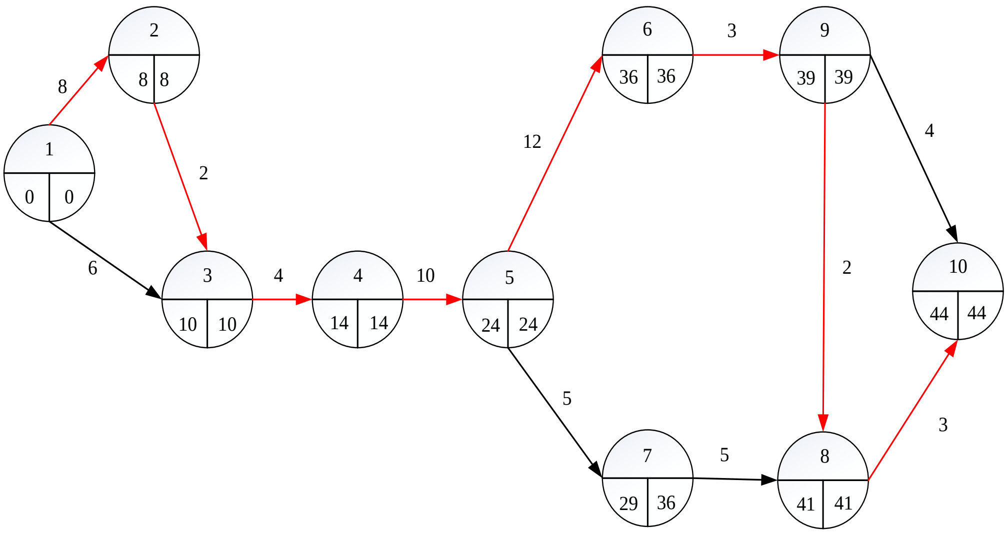
Výpočet časovej analýzy

Tabuľka 16 - časová analýza (zdroj: vlastné spracovanie)

Činnosť	Doba trvania			uzol	σ^2 (y)	σ^2	Rozptyl	ZM	KM	ZP	KP	RC
	a	m	b									
A	**5**	**8**	**10**	**1,2**	**7,83**	**8**	**0,69**	**0**	**8**	**0**	**8**	**0**
B	4	6	7	1,3	5,83	6	0,25	0	6	4	10	4
C	**1**	**2**	**5**	**2,3**	**2,33**	**2**	**0,44**	**8**	**10**	**8**	**10**	**0**
D	**2**	**4**	**6**	**3,4**	**4,0**	**4**	**0,44**	**10**	**14**	**10**	**14**	**0**
E	**7**	**10**	**14**	**4,5**	**10,17**	**10**	**1,36**	**14**	**24**	**14**	**24**	**0**
F	**10**	**12**	**13**	**5,6**	**11,83**	**12**	**0,25**	**24**	**36**	**24**	**36**	**0**
G	4	5	8	5,7	5,33	5	0,44	24	29	31	36	7
H	3	5	7	7,8	5,00	5	0,44	29	34	36	41	7
I	**2**	**3**	**4**	**6,9**	**3,00**	**3**	**0,11**	**36**	**39**	**36**	**39**	**0**
J	**1**	**2**	**3**	**9,8**	**2,00**	**2**	**0,11**	**39**	**41**	**39**	**41**	**0**
K	3	4	6	9,10	4,17	5	0,25	39	43	40	44	1
L	**1**	**3**	**5**	**8,1**	**3,00**	**3**	**0,44**	**41**	**44**	**41**	**44**	**0**

ZM – začiatok možný, KM – koniec možný, ZP – začiatok pravdepodobný, KP – koniec pravdepodobný, RC- časová rezerva

Kritická cesta 1-2-3-4-5-6-9-8-10



Obrázok 2- graf časovej analýzy s kritickou cestou (zdroj: vlastné spracovanie)

Analýza pravdepodobnosti dodržania plánovaných termínov

Aká je pravdepodobnosť, že sa doba realizácia projektu skráti o 5 hodín?

Na výpočet tejto pravdepodobnosti je použitý vzorec:

$$P(T \leq PT) = f\left(\frac{PT - TMn}{\sigma TMn}\right)$$

P = pravdepodobnosť, T = čas, PT = plánovaný termín, TMn = termín možný, σTMn = odhad smerodajnej odchýlky, f = distribučná funkcia

$$P(T \leq 39) = f\left(\frac{39 - 44}{\sqrt{3{,}84}}\right)$$

$$f(n) = f(-2{,}55) = 1 - f(2{,}55) = 1 - 0{,}99461 = 0{,}00539 = 0{,}539\%$$

Pravdepodobnosť, že sa doba realizácie projektu skráti o 5 hodín je 0,539%. Ide o malú pravdepodobnosť.

Aký bude plánovaný termín realizácie projektu ak pripustíme 25% riziko oneskorenia termínu?

Termín sa vypočíta pomocou vzorca, pričom n zvolíme 0,75 aby sme dostali požadovanú pravdepodobnosť:

$$PT = TMn + \sigma TMn.n$$

$$PT = 44 + \sqrt{3{,}84}.\,0{,}75 = 45{,}47$$

Pri pripustení 25% rizika oneskorenia termínu, bude projekt realizovaný približne za 45,47 hodín.

Incidenčná matica

Viď prílohy: s.50 tabuľka 26 – incidenčná matica.

Analýza pravdepodobnosti kritickosti uzlov

Tabuľka 17 - kritickosť uzlov (zdroj: vlastné spracovanie)

Uzol	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
TMj	0	8	10	14	24	36	**29**	34	39	43
TPi	0	8	10	14	24	36	**35**	40	39	43
RIi	0	0	0	0	0	0	**6**	6	0	0
σ^2 TMj	0	0,48	1,28	2,46	8,58	10,11	**11,36**	14,52	10,82	18,06
σ^2 TPi	18,06	12,67	9,73	7,18	1,74	0,13	**0,77**	0,19	0,06	0
n	0	0	0	0	0	0	**-1,72**	-1,56	0	0
f(n)	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	**0,0427**	0,0594	0,5	0,5

Sledovaný bol uzol 7, ktorý ma pravdepodobnosť, že sa stane kritickým približne 4,27%.

Analýza pravdepodobnosti kritickosti uzlov s použitím incidenčnej matice

Tabuľka 18 - kritickosť 5. a 7. uzla (zdroj: vlastné spracovanie)

Činnosť		**TMj**	**TPi**	**Yij^e**	**σ^2 TMj**	**σ^2 TPi**	**σ^2 Yij**	**n**	**f (n)**
i	j								
5	7	24	35	0,1074	8,5849	0,7744	0,1936	-1,72	0,0427
7	8	29	40	0,1074	11,356	0,1936	0,1936	-1,72	0,0427

Výsledok časovej analýzy projektu je hlavne čas, ktorý je potrebný na realizáciu projektu a kritická cesta. V našom prípade je tento čas 44 hodín a kritická cesta (obrázok 2) nám ukazuje poradie činností tak, aby bol projekt ukončený v čo najkratšom čase.

5.3. Riešenie maticových hier

Maticové hry v obore čistých stratégií hráča A a hráča B

Máme hru dvoch hráčov A a B s nulový súčtom. Hráč A môže zahrať tri stratégie A_1, A_2, A_3. Naproti tomu hráč B môže zahrať štyri stratégie B_1, B_2, B_3, B_4. Jednotlivé výplaty hráča A sú uvedené vo výplatnej matici. Úlohou je určiť stratégiu hráčov a hornú a dolnú cenu hry a platbu hry.

Tabuľka 19 - výplatná matica hráčov A a B (zdroj: vlastné spracovanie)

	Stratégie hráča B			
Stratégie hráča A	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**
A1	4	-2	3	0
A2	2	1	5	3
A3	3	0	4	-3

Dolná cena hry pre hráča A:

$$\underline{v} = \max\min a_{ij} = \max(min_1(4,-2,3,0)\,, min_2(2,1,5,3) min_3(3,0,4,-3))$$
$$= \max(-2,1,-3) = 1$$

Horná cena hry pre hráča B:

$$\bar{v} = nim\ max a_{ij} = \min\big(max_1(4,2,3), max_2(-2,1,0), max_3(3,5,4), max_4(0,3,-3)\big)$$
$$= \min(4,1,5,3) = 1$$

Nájdeme sedlový bod hry $\overline{v} = \underline{v}$ tj. *1=1.* Hra má sedlový bod, hráč A bude hrať stratégiu A_2a hráč B stratégiu B_2pričom platba hry je 1.

Tabuľka 20 - stratégia hry (zdroj: vlastné spracovanie)

	Stratégie hráča B				
Stratégie hráča A	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	$\underline{v}$
A1	4	-2	3	0	-2
A2	2	1	5	3	1
A3	3	0	4	-3	-3
$\overline{v}$	4	1	5	3	

Z tabuľky 20 vidíme výsledok jednoduchej maticovej hry. Zelená farba označuje stratégiu, ktorú použijú hráči A a B. Táto stratégia je určená sedlovým bodom.

Maticové hry v obore zmiešaných stratégií hráča C a D

Máme hru dvoch hráčov C a D s nulovým súčtom. Hráč C môže zahrať stratégie C_1, C_2, C_3, pričom hráč D môže reagovať stratégiami $D_1 - D_4$. Jednotlivé výplaty pre hráča C sú uvedené vo výplatnej matici. Úlohou je určiť stratégiu hráčov a hornú a dolnú cenu hry.

Tabuľka 21 - výplatná matica hráča C a D (zdroj: vlastné spracovanie)

	Stratégie hráča D			
Stratégie hráča C	**D_1**	**D_2**	**D_3**	**D_4**
C_1	4	-2	3	0
C_2	2	0	5	3
C_3	3	4	0	-3

Nájdeme dolnú cenu hry pre hráča C:

$$\underline{v} = \max\min a_{ij} = \max\bigl(min_1(4,-2,3,0)min_2(2,0,5,3)min_3(3,4,0,-3)\bigr)$$
$$= \max(-2,0,-3) = 0$$

Spočítame hornú hranicu ceny hry pre hráča D:

$$\overline{v} = \min\max a_{ij} = \min\bigl(max_1(4,2,3)max_2(-2,0,4)max_3(3,5,0)max_4(0,3,-3)\bigr)$$
$$= \min(4,4,5,3) = 3$$

Tabuľka 22 - stratégie hráčov C a D (zdroj: vlastné spracovanie)

	Stratégie hráča D				
Stratégie hráča C	**D_1**	**D_2**	**D_3**	**D_4**	$\underline{v}$
C_1	4	-2	3	0	-2
C_2	2	0	5	3	0
C_3	3	4	0	-3	-3
$\overline{v}$	4	4	5	3	

Z tabuľky 12 vidíme, že hra nemá sedlový bod pretože $\overline{v} \neq \underline{v}$ a teda je nutné ju riešiť v obore zmiešaných stratégií.

Výplatnú tabuľku upravíme podľa vzorca o konštantu α, ktorú pripočítame k údajom v pôvodnej tabuľke:

$$\alpha = \left|\min\min a_{ij}\right| + 1 = |-3| + 1 = 4$$

Tabuľka 23 - stratégie hráčov C a D s konštantou α (zdroj: vlastné spracovanie)

	Stratégie hráča D			
Stratégie hráča C	**D_1**	**D_2**	**D_3**	**D_4**
C_1	8	2	7	4
C_2	6	4	9	7
C_3	7	8	4	1

Zostavíme lineárny model pre hráča C a D hru vyriešime:

$$8x_1 + 6x_2 + 7x_3 \geq 1$$

$$2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \geq 1$$

$$7x_1 + 9x_2 + 4x_3 \geq 1$$

$$4x_1 + 7x_2 + 1x_3 \geq 1$$

$$z = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow min$$

$$x_{1,2,3} \geq 0$$

$$8x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 4x_4 \leq 1$$

$$6x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 7x_4 \leq 1$$

$$7x_1 + 8x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 1$$

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow max$$

$$x_{1,2,3,4} \geq 0$$

Na záver zostavíme tabuľky pre stratégie a výplaty hráčov C a D.

Tabuľka 24 - stratégia hráča C (zdroj: vlastné spracovanie)

Premenná	Pravdepodobnosť ťahu
C1	0
C2	0,7
C3	0,3
Výplata hry	1,2

Tabuľka 25 - stratégia hráča D (zdroj: vlastné spracovanie)

Premenná	Pravdepodobnosť ťahu
D1	0
D2	0,6
D3	0
D4	0,4
Výplata hry	1,2

Z tabuliek 24 a 25 vidíme pravdepodobnú stratégiu hráčov. Hráč C by na 70% použil stratégiu $C1$ a na 30% stratégiu $C3$. Hráč D by použil na 60% stratégiu $D2$ a na 40% stratégiu $D4$.

Pri teórií hier sú uvedené stratégie iba pravdepodobné. Pri väčšom počte hráčov by sa hráči riadili podľa rozhodnutí ich oponentov ale aj podľa vlastného úsudku.

6. Záver

V tejto práci je poskytnutý pohľad na rôzne druhy matematickým metód a ich využitie v ekonomickej oblasti. Matematických metód je veľké množstvo a skoro všetky majú interdisciplinárne využitie.

Lineárne programovanie je možné využiť pri maximalizácií zisku, minimalizácií nákladov a pod. Rôzne druhy sieťovej analýzy sa používajú na riadenie projektov, pričom spolu so správnym riadením projektu pomáhajú predchádzať problémom a z ekonomického hľadiska znižovaniu potencionálnych nákladov. Ekonometria má uplatnenie v predikácií napr. finančných kríz alebo vývoja HDP, čo má z ekonomického hľadiska veľký význam. Teória hier je v ekonomike využívaná na analýzu veľkého množstva ekonomických javov ako napr. trh, aukcie, duopoly, oligopoly a pod.

V neposlednom rade bolo cieľom tejto práce aplikovať matematické metódy na vybrané reálne problémy, ktoré sú popísané v predchádzajúcej kapitole.

V práci je preukázaná využiteľnosť matematických metód v ekoomií.

7. Zoznam použitej literatúry

BREZINA, I. ČIČKOVÁ, Z. GEŽÍK, P. 2012. *Sieťová analýza*, Vydavateľstvo Ekonóm. Bratislava. ISBN 978-80-225-3503-8

COBB, C. W. DOUGLAS, P. H. 1928. *American Economic Review 18.*

DADKHAH, K. 2011. *Foundations of Mathematical and Computational Economics,* Springer, Berlín. ISBN 03-2423-583-6.

ĎUĎÁK, J. 2010. *Ekonomicko-matematické metódy*. Prednáška. Nitra. Technická fakulta Slovenskej poľnohospodárskej univerzity.

FÁBRY, J. 2011. *Matematické modelování*. Professional Publishing. Praha

GOLDBERG, A. S. 1964. *Econometric Theory*. New York. John Wiley & Sons Inc.

HATRÁK, M. 2007. *Ekonometria*. Iura edition. Bratislava. ISBN 978-80-8078-150-7.

HOLOUBEK, J. 2009. *Ekonomicko-matematické metody*. Brno. Mendelova zemědělská a lesnícká univerzita v Brně.

JANÁČEK, J. 1999. *Matematické programování*. Žlinská univerzita.

ISBN 80-7100-573-8.

KÁČER, M. 10/2013. *Predikcie finančných kríz s využitím metód finančnej ekonometrie*. Biatec [online].21. s. 23-26 [cit. 2015-05-25]. ISSN 1335 – 0900. Dostupné z: http://www.nbs.sk/_img/Documents/_PUBLIK_NBS_FSR/Biatec/Rok2013/10-2013/biatec13-10_WEB.pdf.

KENNEDY, P. 2003. *A Guide to Econometrics*. MIT Press. ISBN 978-14-0518-257-7.

MEZNÍK, I. 2009. *Diskrétní matematika pro užitou informatiku*. Brno. VUT v Brně, Fakulta podnikatelská. ISBN 978-80-7204-653-8.

MYERS, S. C. POGUE, G. A. 1973. *A Programming Approach to Corporate Financial Management*. The Journal of Finance, Vol. 29, No. 2, p. 579–599, New York.

NOBELPRIZE. *The prize in economic sciences 2012*. Nobelprize.org [online].

[cit. 2015-05-25]. Dostupné z:

http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/2012/

PALÚCH, S. 2008. *Algoritmická teória grafov*. Žilinská univerzita v Žiline. Žilina. Dostupné z: http://frcatel.fri.uniza.sk/users/paluch/grafy.pdf, 31.1.2015.

SAMUELSON, P. A. KOOPMANS, T. C. STONER, R. J. 1954. *Report of the Evaluative Commitee for Econometrica. Econometrica,* Vol. 22, No.2.

ŠUBRT, T. a kol. 2011. *Ekonomicko-matematické metody*. Aleš Čeněk s.r.o. Plzeň.

ISBN 978-80-7380-345-2.

THEIL, H. 1971. *Principles of Econometrics*. New York. John Wiley & Sons Inc.

8. Zoznam obrázkov a tabuliek

9. Prílohy

Tabuľka 26 - incidenčná matica (zdroj: vlastné spracovanie)

i\j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	TMj	σTMj
1		0(4,25) 8(0,69) 8(0,69)	4(3,37) 6(0,25) 6(0,25)								0	0
2			8(3,56) 10(1,13) 2(0,44)								8	0,69
3				10(3,12) 14(1,57) 4(0,44)							10	1,13
4					14(2,68) 24(2,93) 10(1,36)						14	1,57
5						24(0,61) 36(3,18) 12(0,25)	30(1,32) 29(3,37) 5(0,44)				24	2,93
6									36(0,36) 39(3,29) 3(0,11)		36	3,18
7								35(0,88) 34(3,81) 5(0,44)			29	3,37
8										40(0,44) 37(4,25) 3(0,44)	34	3,81
9								38(0,55) 41(3,4) 2(0,11)		39(0,25) 43(3,54) 4(0,25)	39	3,29
10											43	4,25
TPi	0	8	10	14	24	36	35	40	39	43		
σTPi	4,25	3,56	3,12	2,68	1,32	0,36	0,88	0,44	0,25	0		
RI	0	0	0	0	0	0	6	6	0	0		